Marin Chirciu

INEGALITĂŢI ALGEBRICE 2

DE LA INIŢIERE LA PERFORMANŢĂ

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

Editura Paralela 45

Cuprins

capitolul 1

Metoda SOS*

„Dicţionar: X = Eternul necunoscut
Y = Praştia alfabetului.”
Tudor Muşatescu

Sunt adevărate afirmaţiile:

$a^2 \geq 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $a = 0$.

$(a-b)^2 \geq 0,\ \forall a,\ b \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $a = b$.

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $a = b = c$.

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $a = b = c$.

$ax^2 + bx + c \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$, cu egalitate pentru $\Delta = 0$ şi $x = \frac{-b}{2a}$.

$a \leq x \leq b \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \leq 0$, cu egalitate dacă $x = a$ sau $x = b$.

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc,\ \ \forall a,\ b,\ c \geq 0$, cu egalitate pentru $a = b = c$.

$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab},\ \ \forall a,\ b > 0$, cu $ab \geq 1$.

$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c,\ \ \forall a,\ b,\ c > 0$ şi $abc = 1$, cu egalitate pentru $a = b = c = 1$.

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9,\ \ \forall a,\ b,\ c > 0$, cu egalitate pentru $a = b = c$.

$a^3 + b^3 \geq ab(a+b),\ \ \forall a,\ b \geq 0$, cu egalitate pentru $a = b$.

$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b}{3},\ \ \forall a,\ b > 0$, cu egalitate pentru $a = b$.

$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{3},\ \ \forall a,\ b > 0$, cu egalitate pentru $a = b$.

$\sqrt{a^2+ab+b^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b),\ \ \forall a,\ b \geq 0$, cu egalitate pentru $a = b$.

---

* *SOS method = Sum of Squares* = sumă de pătrate

În continuare sunt propuse aplicaţii ce pot fi rezolvate folosind inegalităţile de mai sus.

1.1. Leme utile în rezolvarea unor inegalităţi:

a) Dacă $a, b, c > 0$, atunci $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{9\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}$.

b) Dacă $a, b, c > 0$, atunci $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3+\frac{18\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}$.

c) Fie $a, b > 0$. Arătaţi că: $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\leq\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

d) Dacă $a, b, c > 0$, atunci $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\geq(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

e) Dacă $a, b, c > 0$ astfel încât $abc = 1$, arătaţi că:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq a^2+b^2+c^2.$$

f) Dacă $a, b, c > 0$, atunci $\sum\frac{a^2}{b^2}\geq\frac{1}{2}\sum\frac{b+c}{a}$.

g) Dacă $a, b, c > 0$, atunci $\sum\frac{a^2}{b^2}\geq\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2abc}-1$.

h) Dacă $a, b, c > 0$, atunci $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}$.

1.2. a) Dacă $x, y \geq 0$ şi $x + y = 2$, arătaţi că $x^2y^2\left(x^2+y^2\right)\leq 2$.

Olimpiada Naţională Irlanda, 2000

b) Dacă $x, y \geq 0$ astfel încât $x + y = 2$ şi $n\in\mathbb{N}$, atunci $x^ny^n\left(x^2+y^2\right)\leq 2$.

Dezvoltare, Marin Chirciu

c) Dacă $x, y \geq 0$ şi $x + y = 2$, arătaţi că $x^3y^3\left(x^3+y^3\right)\leq 2$.

Olimpiada Naţională India, 2008

d) Dacă $x, y \geq 0$ astfel încât $x + y = 2$ şi $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 3$, atunci $x^ny^n\left(x^3+y^3\right)\leq 2$.

Dezvoltare, Marin Chirciu

1.3. a) Demonstraţi că pentru orice numere pozitive a, b, c cu suma $a+b+c=\frac{3}{2}$ avem inegalitatea: $\frac{a}{1+4b^2}+\frac{b}{1+4c^2}+\frac{c}{1+4a^2}\geq\frac{3}{4}$.

GMB 3/2016, Vasile Mircea Popa, Sibiu

b) Dacă $a,\ b,\ c,\ n>0$ şi $a+b+c=\dfrac{3}{n}$, arătaţi că:

$$\frac{a}{1+n^2b^2}+\frac{b}{1+n^2c^2}+\frac{c}{1+n^2a^2}\geq\frac{3}{2n}.$$

1.4. a) Fie *a*, *b*, *c* numere reale pozitive cu suma 1. Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

All-Russian Olympiad, 2003

b) Arătaţi că, dacă *a*, *b*, *c*, *d* sunt numere reale strict pozitive cu suma 1, atunci:

$$\frac{3}{1-a}+\frac{3}{1-b}+\frac{3}{1-c}+\frac{3}{1-d}\geq\frac{5}{1+a}+\frac{5}{1+b}+\frac{5}{1+c}+\frac{5}{1+d}.$$

GM 11/2015, Supliment de exerciţii, Daniel Sitaru, Drobeta–Turnu-Severin

c) Fie $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ numere reale nenegative cu suma 1, unde $n\geq 2$. Arătaţi că:

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-a_1}\geq(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_1}.$$

Marin Chirciu şi Octavian Stroe, Piteşti

1.5. a) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Arătaţi că pentru $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\in\left(0,\ \sqrt{n}\right]$, cu $a_1+a_2+...+a_n=n$, are loc următoarea inegalitate:

$$\frac{1}{a_1^2+(a_2+a_3+...+a_n)}+\frac{1}{a_2^2+(a_1+a_3+...+a_n)}+...+\frac{1}{a_n^2+(a_1+a_3+...+a_{n-1})}\leq 1.$$

GM 11/2016, Andra-Mălina Cardaş, elevă, Botoşani

b) Dacă *a*, *b*, *c* > 0 cu *a* + *b* + *c* = 3, arătaţi că:

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\leq 1.$$

c) Dacă *a*, *b*, *c* > 0 cu *a* + *b* + *c* = 3, arătaţi că:

$$\frac{1}{a^2+k(b+c)}+\frac{1}{b^2+k(c+a)}+\frac{1}{c^2+k(a+b)}\leq\frac{3}{2k+1},\ \text{unde } 1\leq k\leq 2.$$

d) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Arătaţi că pentru $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n>0$, cu $a_1+a_2+...+a_n=n$, are loc următoarea inegalitate:

$$\frac{1}{a_1^2+k(a_2+a_3+...+a_n)}+\frac{1}{a_2^2+k(a_1+a_3+...+a_n)}+...+\frac{1}{a_n^2+k(a_1+a_3+...+a_{n-1})}\leq$$

$$\leq\frac{n}{1+k(n-1)},\ \text{unde } 1\leq k\leq 2.$$

1.6. a) Fie $a,\ b\geq 0$, numere reale. Dacă $\sqrt{a}\cdot|a-b|\leq 1$ şi $\sqrt{b}\cdot|4a-b|\leq 1$, arătaţi că $8a^3+b^3\leq 9$.

GM 1/2017, George Stoica, Canada

b) Fie $a, b \geq 0$ şi $\lambda > 0$ numere reale. Dacă $\sqrt{a} \cdot \left| a - \frac{2}{\lambda} \cdot b \right| \leq 1$ şi $\sqrt{b} \cdot \left| 2\lambda \cdot a - b \right| \leq 1$, arătaţi că $(\lambda a)^3 + b^3 \leq \lambda^3 + 1$.

Dezvoltare, Marin Chirciu

1.7. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$, cu $a + b + c = 3$. Arătaţi că:

a) $\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1$.

RMT 2/2017, Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

b) $\frac{a}{a^2+n} + \frac{b}{b^2+n} + \frac{c}{c^2+n} \leq \frac{3}{n+1}$, unde $n \geq 1$.

Marin Chirciu

1.8. Dacă $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 3$, arătaţi că:

a) $\sum \frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} \geq 2$.

RMM 2017, Nguyen Viet Hung, Hanoi, Vietnam

b) $\sum \frac{a^3+b^3}{a^2+nab+b^2} \geq \frac{6}{n+2}$, unde $n \geq 0$.

1.9. Să se arate că

$$\frac{1}{9a} + \frac{1}{9b} + \frac{10}{a+b} \geq \frac{121}{7}\left(\frac{1}{2a+5b} + \frac{1}{2b+5a}\right),$$

oricare ar fi numerele $a, b > 0$.

GM 3/2017, Mihaela Berindeanu, Bucureşti

1.10. Să se demonstreze că, dacă $x, y, z > 0$, atunci este adevărată inegalitatea

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx + \frac{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Sclipirea Minţii nr. XIX, 05/2017, Nela Ciceu şi Roxana Mihaela Stanciu

1.11. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Să se demonstreze că:

a) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{30abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{27}{4}$.

GM 5/2017, Costel Anghel, Slatina

b) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + n \cdot \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 3 + \frac{n}{8}$, $n \leq 32$.

c) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{32abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 7$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

capitolul 2

Inegalitatea mediilor

,,Între ceea ce este corect şi ceea ce este greşit, alege ceea ce te face fericit."

$A_m \geq G_m$:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \forall a,\ b \geq 0.$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \quad \forall a,\ b,\ c \geq 0.$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \quad \forall a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \geq 0.$$

$A_m \geq G_m \geq H_m$:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \quad \forall a,\ b > 0.$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}, \quad \forall a,\ b,\ c > 0.$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}, \quad \forall a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n > 0.$$

$Q_m \geq A_m$:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

$$\max_{k=\overline{1,\,n}}\{a_k\} \geq Q_m \geq A_m \geq G_m \geq H_m \geq \min_{k=\overline{1,\,n}}\{a_k\}.$$

$$\max\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\} \geq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq$$

$$\geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \geq \min\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}.$$

2.1. Dacă $x, y, z > 0$ şi $x + y + z = 1$, arătaţi că:

a) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64$.

b) $\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{2}{y}\right)\left(1+\frac{2}{z}\right) \geq 343$.

c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1000}{27}$.

d) $\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(y+\frac{2}{y}\right)\left(z+\frac{2}{z}\right) \geq \left(\frac{19}{3}\right)^3$.

Internet, Mathlinks, AoPS

Dacă $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ şi $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$, arătaţi că:

a′) $\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)...\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geq (1+n)^n$.

b′) $\left(1+\frac{k}{x_1}\right)\left(1+\frac{k}{x_2}\right)...\left(1+\frac{k}{x_n}\right) \geq (1+kn)^n$, $k > 0$.

c′) $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)...\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right) \geq \left(n+\frac{1}{n}\right)^n$.

d′) $\left(x_1+\frac{k}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{k}{x_2}\right)...\left(x_n+\frac{k}{x_n}\right) \geq \left(kn+\frac{1}{n}\right)^n$, $k \geq 1$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

2.2. a) Fie a, b, c numere reale pozitive cu $abc = a + b + c + 2$. Arătaţi că:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}.$$

GM 9/2016, Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

b) Fie a, b, c, d numere reale pozitive cu $abcd = a + b + c + d + 8$. Arătaţi că:

$$\frac{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{c^3}+\sqrt[4]{d^3}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}}+\frac{1}{\sqrt[4]{c}}+\frac{1}{\sqrt[4]{d}}.$$

c) Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive cu $a_1a_2...a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + 2^n - 2n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Arătaţi că:

$$\frac{\sqrt[n]{a_1^{n-1}}+\sqrt[n]{a_2^{n-1}}+...+\sqrt[n]{a_n^{n-1}}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1}}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

Dezvoltare, Marin Chirciu

2.3. Fie $a, b > 0$. Demonstraţi că:

a) $4 \leq \left(\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)\left(\frac{a+b}{2ab}+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\right) \leq \frac{(a+b)^2}{ab}$.

AoPS, 23 decembrie 2016, Daniel Sitaru

b) $4 \leq \left(\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)\left(\frac{a+b}{2ab}+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\right) \leq 4-2n+n\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, cu $n \geq \frac{1}{2}$.

c) $4\le\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\right)\left(\frac{2}{a+b}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\le 4-2n+n\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, cu $n\ge\frac{1}{4}$.

d) $4\le\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2ab}{a+b}\right)\left(\frac{2}{a+b}+\frac{a+b}{2ab}\right)\le 4-2n+n\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, cu $n\ge\frac{1}{4}$.

e) $4\le\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)\left(\frac{2}{a+b}+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\right)\le 4-2n+n\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, cu $n\ge\frac{1}{4}$.

f) $4\le\left(\sqrt{ab}+\frac{2ab}{a+b}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{a+b}{2ab}\right)\le 4-2n+n\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, cu $n\ge\frac{1}{4}$.

g) $4\le\left(\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\right)\le 4-2n+n\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, cu $n\ge\frac{1}{2}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

2.4. a) $9\le\left(\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{ab}+\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{2}{a+b}\right)\le 5+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$.

AoPS, 23 decembrie 2016, Daniel Sitaru

b) $9\le\left(\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{ab}+\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{2}{a+b}\right)\le 9-2n+n\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, $n\ge\frac{3}{4}$.

c) $9\le\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)\left(\frac{2}{a+b}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\right)\le 9-2n+n\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$,

cu $n\ge\frac{3}{4}$.

d) $9\le\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)\left(\frac{2}{a+b}+\frac{a+b}{2ab}+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\right)\le 9-2n+n\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$,

cu $n\ge\frac{3}{4}$.

e) $9\le\left(\sqrt{ab}+\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{a+b}{2ab}+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\right)\le 9-2n+n\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$,

cu $n\ge\frac{5}{4}$. *Dezvoltări, Marin Chirciu*

2.5. a) Fie *a*, *b*, *c*, *d* > 0 cu *a* + *b* + *c* + *d* = 1. Să se arate că $\sum\frac{a^2+b+c}{b+c+d}\ge 3$.

GM 12/2016, Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

b) Fie *a*, *b*, *c* > 0 cu *a* + *b* + *c* = 1. Să se arate că $\sum\frac{a^2+b}{b+c}\ge 2$.

c) Fie $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ cu $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Să se arate că:

$$\sum \frac{a_1^2 + a_2 + ... + a_{n-1}}{a_2 + a_3 + ... + a_n} \geq n - 1.$$

Dezvoltare, Marin Chirciu

2.6. Arătaţi că, dacă $a, b, c > 0$, atunci

a) $\left(\frac{bc}{a}\right)^{\lg\frac{b}{c}} + \left(\frac{ca}{b}\right)^{\lg\frac{c}{a}} + \left(\frac{ab}{c}\right)^{\lg\frac{a}{b}} \geq 3$.

RMT 1/2017, Gheorghe Stoica, Petroşani

b) $\left(\frac{bc}{na}\right)^{\lg\frac{b}{c}} + \left(\frac{ca}{nb}\right)^{\lg\frac{c}{a}} + \left(\frac{ab}{nc}\right)^{\lg\frac{a}{b}} \geq 3$, unde $n > 0$.

Dezvoltare, Marin Chirciu

2.7. a) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi numere reale pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ astfel încât $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot ... \cdot \sqrt[n]{n}$. Să se arate că:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2^2} + ... + \frac{1}{a_n^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

şi să se determine cazurile de egalitate.

GM 1/2017, Dorlir Ahmenti, Albania

b) Fie numerele reale pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ astfel încât $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot ... \cdot \sqrt[n]{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^3} + ... + \frac{1}{a_n^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

şi să se determine cazurile de egalitate.

2.8. Arătaţi că pentru orice numere reale a, b, $c > 0$, cu $abc = 1$ sunt adevărate relaţiile:

a) $\frac{1}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{1}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{1}{c^5 + a^5 + ca} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

GM 10/2016, Daniela Vlaicu, Zalău

b) $\sum \frac{1}{b^{2n+3} + c^{2n+3} + (bc)^{3-2n}} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Când au loc egalităţile?

Marin Chirciu

2.9. Fie $a, b, c > 0$ numere reale pozitive cu proprietatea că $a + b + c = 1$. Arătaţi că:

a) $\sqrt{3a^2 + 4ab + b^2} + \sqrt{3b^2 + 4bc + c^2} + \sqrt{3c^2 + 4ca + a^2} \leq 2\sqrt{2}$.

GM 2/2017, Ovidiu Bobb, Copalnic-Mănăştur, Maramureş

capitolul 3

Inegalitatea Cauchy–Schwarz

„Învaţă regulile ca să ştii cum să le încalci.”
Dalai Lama

Inegalitatea lui Bergström (Cauchy–Schwarz) (CS)

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y},\quad \forall a,\ b\in\mathbb{R},\quad x,\ y>0$$ (**Titu Andreescu**).

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z},\quad \forall a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ \ x,\ y,\ z>0.$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz},\quad \forall a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z>0.$$

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n},\quad \forall a_i\in\mathbb{R},\ \ x_i>0,\ \ i=\overline{1,\ n}.$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},\quad \forall a,\ b,\ c>0$$ (**Nesbitt**).

$$\frac{a}{b+nc}+\frac{b}{c+na}+\frac{c}{a+nb}\geq\frac{3}{n+1},\quad \forall a,\ b,\ c>0,\ \ n\geq 0\ .$$

Inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwarz (CBS)

$$(ax+by)^2\leq\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right),\quad \forall a,\ b,\ x,\ y\in\mathbb{R}\ .$$

$$(ax+by+cz)^2\leq\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right),\quad \forall a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}\ .$$

$$\left(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\right)^2\leq\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right),\ \forall a_i,\ x_i\in\mathbb{R},\ \ i=\overline{1,\ n}.$$

Cazuri particulare din inegalitatea lui Hölder

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)},\quad \forall a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z>0.$$

$$\frac{a^4}{x}+\frac{b^4}{y}+\frac{c^4}{z}\geq\frac{(a+b+c)^4}{9(x+y+z)},\quad \forall a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z>0.$$

$$\frac{a^n}{x}+\frac{b^n}{y}+\frac{c^n}{z}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^n}{3^{n-2}\left(x+y+z\right)},\quad \forall a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z>0,\ \ n\geq 2,\ \ n\in\mathbb{N}\,.$$

$$\frac{a^n}{x}+\frac{b^n}{y}\geq\frac{\left(a+b\right)^n}{2^{n-2}\left(x+y\right)},\quad \forall a,\ b,\ x,\ y>0,\ \ n\geq 2,\ \ n\in\mathbb{N}\,.$$

3.1. a) Numerele reale a, b, c, d verifică $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Arătaţi că:

$$a^4+b^4+c^4+d^4+4(a+b+c+d)^2\leq 68\,.$$

GMB 2/2016, Ion Nedelcu

b) Numerele reale $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_k$ verifică $a_1^2+a_2^2+...+a_k^2=k,\ k\geq 2$. Arătaţi că:

$$a_1^4+a_2^4+...+a_k^4+n(a_1+a_2+...+a_k)^2\leq nk^2+k\text{ , unde } n\geq 2\,.$$

GMB 9/2016, Marin Chirciu

3.2. Dacă $a,\ b,\ c>0$ şi $abc=1$, demonstraţi că au loc inegalităţile:

a) $\sum\frac{1}{(a+1)(a+2)}\geq\frac{1}{2}$. *AoPS 7/2016*

b) $\sum\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\geq\frac{3}{(n+1)(n+2)}$, unde $0\leq n\leq 1$.

c) $\sum\frac{1}{(a+1)(a+n)}\geq\frac{3}{2(n+1)}$, unde $0\leq n\leq 2$.

d) $\sum\frac{1}{(a+n)(a+k)}\geq\frac{3}{(n+1)(k+1)}$, unde $n,\ k\geq 0$ şi $2nk\leq n+k+1$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

3.3. a) Numerele $x, y, z\in(0,\infty)$ verifică $xyz=xy+yz+zx$. Să se demonstreze că:

$$\frac{xy}{z\left(1+xy\right)}+\frac{yz}{x\left(1+yz\right)}+\frac{zx}{y\left(1+zx\right)}\geq\frac{9}{10}\,.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

b) Dacă numerele $a,\ b,\ c\in\left(0,\ \infty\right)$ verifică $a+b+c=1$, să se arate că:

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\geq\frac{9}{10}\,.$$

c) Numerele $x,\ y,\ z\in\left(0,\ \infty\right)$ verifică $xyz=xy+yz+zx$. Să se demonstreze că:

$$\frac{xy}{z\left(n+xy\right)}+\frac{yz}{x\left(n+yz\right)}+\frac{zx}{y\left(n+zx\right)}\geq\frac{9n}{9n+1}\text{ , unde } n\geq 0\,.$$

d) Dacă numerele $a,\ b,\ c\in\left(0,\ \infty\right)$ verifică $a+b+c=1$, să se arate că:

$$\frac{a}{n+bc}+\frac{b}{n+ca}+\frac{c}{n+ab}\geq\frac{9n}{9n+1}\text{ , unde } n\geq 0\,.$$

Dezvoltare, Marin Chirciu

3.4. a) Se consideră numerele a, b, c $\in$ (0, 1) sau a, b, c $\in$ (0, ∞). Notăm $x=\log_a(bc)$, $y=\log_b(ac)$, $z=\log_c(ab)$. Arătaţi că:

$$\sqrt{2(x+y+z)+6} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \ .$$

Problema 3, Concursul Gazeta Matematică şi Viitorii Olimpici, 2017

b) Se consideră numerele a, b, c, d $\in$ (0, 1) $\cup$ (1, ∞). Notăm $x=\log_a(bcd)$, $y=\log_b(acd)$, $z=\log_c(abd)$, $t=\log_d(abc)$. Arătaţi că:

$$\sqrt{3(x+y+z+t)+12} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{t} \ .$$

Problema 3, Concursul Gazeta Matematică şi Viitorii Olimpici, 2017

c) Se consideră numerele $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n \in (0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$. Notăm $x_1=\log_{a_1}(a_2a_3...a_n)$, $x_2=\log_{a_1}(a_1a_3...a_n)$, ..., $x_n=\log_{a_n}(a_1a_2...a_{n-1})$. Arătaţi că:

$$\sqrt{(n-1)(x_1+x_2+...+x_n)+n(n-1)} \geq \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n} \ .$$

3.5. Dacă a, b, $c > 0$, demonstraţi că:

a) $\log_{ab^3c^3} a+\log_{bc^3a^3} b+\log_{ca^3b^3} c \geq \frac{3}{7}$. *RMT 1/2017, Florin Rotaru, Focşani*

b) $\log_{ab^nc^n} a+\log_{bc^na^n} b+\log_{ca^nb^n} c \geq \frac{3}{2n+1}$, unde $n \geq 1$.

c) $\log_{ab^nc^m} a+\log_{bc^na^m} b+\log_{ca^nb^m} c \geq \frac{3}{n+m+1}$, unde $n \geq 0$, $m \geq 0$, $n + m \geq 2$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

3.6. a) Să se arate că, dacă x, y, $z > 0$, atunci:

$$\frac{1}{x^3+x+2}+\frac{1}{y^3+2y+2}+\frac{1}{z^3+3x+12}<\frac{7}{24}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}} \ .$$

Constantin Nicolau, Curtea de Argeş

b) Inegalitatea poate fi extinsă la mai multe variabile. Să se arate că, dacă x_1, x_2, ..., $x_n > 0$, atunci:

$$\frac{1}{x_1^3+x_1+2}+\frac{1}{x_2^3+2x_1+2}+...+\frac{1}{x_n^3+nx_1+n(n+1)}<$$

$$<\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{x_1^n}+\frac{1}{x_2^n}+...+\frac{1}{x_n^n}\right)}.$$

3.7. a) Să se determine numerele reale $x,\ y,\ z>\frac{3}{2}$ cu proprietatea că

$$\frac{(x+1)^2}{y+z-1}+\frac{(y+2)^2}{z+x-2}+\frac{(z+3)^2}{x+y-3}=18.$$

GM 2/2017, Alessandro Ventullo, Milano, Italia